第三章 向量

3-1. 设$\alpha_1=(5,-1,3,2),3\alpha_1-4\alpha_2=(3,-7,17,-2),$.求$2\alpha_1+3\alpha_2$.

3-2. 设$3(\alpha_1-\alpha)+2(\alpha_2+\alpha)=5(\alpha_3+\alpha)$,其中$\alpha_1=(2,5,1,3),\alpha_2=(10,1,5,10),$ $\alpha_3=(4,1,-1,1)$, 求α.

3-3. 设$\alpha_1=(3,-3,2)^T$，$\alpha_2=(-2,1,2)^T$，$\alpha_3=(1,2,-1)^T$，$\beta=(4,5,6)^T$. 试问向量β能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？若能，写出线性表示式.

3-4. 选择题

1. 设β，α_1,α_2线性相关，β，α_2,α_3线性无关，则正确的结论是（　　）.

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关；　　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关；

（C）α_1可由β,α_2,α_3线性表示；　　（D）β可由α_1,α_2线性表示.

2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是（　　）.

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3-\alpha_1$；　　（B）$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3$；

（C）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$；　　（D）$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$.

3. 设α_1，α_2是n维向量,令$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_2=-\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=5\alpha_1+2\alpha_2$,则有（　　）.

(A) β_1,β_2,β_3必线性无关；　　(B) β_1,β_2,β_3必线性相关

(C) 仅当α_1，α_2线性无关时，β_1,β_2,β_3线性无关；

(D) 仅当α_1,α_2线性相关时,β_1,β_2,β_3线性相关.

3-5. 填空题

（1）设$\beta=(3,-4)$，$\alpha_1=(1,2),\alpha_2=(-1,3)$，则$\beta$表成$\alpha_1,\alpha_2$的线性组合为_____；

（2）设向量组$\alpha_1=(1,1,0),\alpha_2=(1,3,-1),\alpha_3=(5,3,t)$线性相关，则$t=$_____；

（3）设向量组$\alpha_1=(1,1,0),\alpha_2=(1,3,-1),\alpha_3=(5,3,t)$的秩为3，则参数$t$应满足的条件是_____；

(4) 已知三维向量组 β_1,β_2,β_3 线性无关，则向量组 $\beta_1-\beta_2,\beta_2-k\beta_3,\beta_3-\beta_1$ 也线性无关的充要条件为 $k\neq$ _____.

3-6. (1) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,证明:$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 也线性无关.

(2) 设向量组 α,β,γ 线性无关，证明：向量组 $\alpha+\beta,\beta+\gamma,\gamma+\alpha$ 也线性无关.

3-7. 判别下列向量组的线性相关性：

(1) $\alpha_1=(1,2)^T,\alpha_2=(2,3)^T,\alpha_3=(4,3)^T$；

(2) $\alpha_1=(1,1,3,1)^T,\alpha_2=(4,1,-3,2)^T,\alpha_3=(1,0,-1,2)^T$；

(3) $\alpha_1=(1,1,2,2,1)^T,\alpha_2=(0,2,1,5,-1)^T,\alpha_3=(2,0,3,-1,3)^T,\alpha_4=(1,1,0,4,-1)^T$；

3-8. 已知 $\alpha_1=(1,0,2,1)^T$，$\alpha_2=(1,2,0,1)^T$，$\alpha_3=(2,1,3,2)^T$，$\alpha_4=(2,5,-1,4)^T$ 判断下列三组向量是线性相关还是线性无关？

(1) α_1，α_2，α_3，α_4；　(2) α_1，α_2，α_3；　(3) α_1，α_2，α_4.

3-9. 设 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，则表示法唯一的充分必要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

3-10. （1）设 $\alpha_1=(\lambda,\ 1,\ 1)^T,\alpha_2=(1,\ \lambda,\ 1)^T,\alpha_3=(1,\ 1,\ \lambda)^T$.讨论 λ 取何值时，α_1，α_2，α_3 线性无关；λ 取何值时，α_1，α_2，α_3 线性相关.

（2）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，当 m,p 满足什么条件时，向量组 $m\alpha_2-\alpha_1,p\alpha_3-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$ 线性相关？

3-11. 求下列矩阵 A 的列向量组的一个极大无关组，并把不属极大无关组的列向量用极大无关组线性表示.

（1） $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$，　(2) $\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}$.

3-12. 求下列向量的秩和一个极大线性无关组：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(6,4,1,-1,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,2,3,-4),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,4,-9,-6,22),\boldsymbol{\alpha}_4=(7,1,0,-1,3)$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,2,0),\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,6)$；

（3）$\alpha_1=(1,2,-1,1)^T,\alpha_2=(2,0,t,0)^T,\alpha_3=(0,-4,5,-2)^T,\alpha_4=(3,-2,t+4,-1)^T$.

3-13. 求下列向量组的一个极大无关组,并将其余向量用此极大无关组线性表示.

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,3,1),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,-1,3),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(5,-2,8,-9),\ \boldsymbol{\alpha}_4=(-1,3,1,7)$;

3-14. 已知向量组 $\alpha_1=(1,a,a,a)^T,\alpha_2=(a,1,a,a)^T,\alpha_3=(a,a,1,a)^T,\alpha_4=(a,a,a,1)^T$ 的秩为 3, 试确定 a 的值.

3-15. 设在向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 中，$\alpha_1\neq 0$，并且每一 $\alpha_i\ (2\le i\le r)$ 都不能表成它的前 $i-1$ 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 的线性组合. 证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.