第 5 章 矩阵的相似

5-1. 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ a & -2 & 2\\ 3 & b & -1\end{pmatrix},$$

如果 A 的特征值 λ_1 对应的一个特征向量 $\alpha_1=(1,-2,3)^T$，求 a， b， λ_1 的值.

5-2. 设 λ 是方阵 A 的特征值，证明：

(1) $k\lambda$ 是 kA 的特征值;

(2) λ^m 是 A^m 的特征值;

(3)当 A 可逆时， λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值.

5-3. 设 $\lambda\neq 0$ 是 m 阶矩阵 $A_{m\times n}B_{n\times m}$ 的特征值, 证明 λ 也是 n 阶矩阵 BA 的特征值.

5-4. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=E$, 证明: A 的特征值只能是 1 或−1.

5-5. 设 $p_1=(2,1,-1)^T$ $p_2=(2,-1,2)^T$ $p_3=(3,0,0)^T$ 都是矩阵 A 的特征向量, 对应的特征值依次是 3, 2, 1, 求 A.

5-6. 设 A 为 n 阶矩阵, λ_1,λ_2 为 A 的两个不同的特征值, α_1,α_2 分别是矩阵 A 属于 λ_1，λ_2 的特征向量, 证明: $\alpha_1+\alpha_2$ 不是 A 的特征向量.

5-7. 设 α 是 n 维非零列向量, 求证 α 是矩阵 $\alpha\alpha^T$ 的特征向量.

5-8. 求下列矩阵的特征值和特征向量

(1) $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$,　　(2) $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$,　　(3) $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$,

(4) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}$,　　(5) $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 4\\ -4 & -3 & -2\\ 4 & -2 & 4\end{pmatrix}$.

5-9. 试用施密特法正交下列向量组：

(1) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$ ，

(2) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$.

5-10. 证明：

(1)正交矩阵的逆矩阵是正交矩阵;

(2)两个正交矩阵的乘积仍是正交矩阵；

(3) 正交矩阵的伴随矩阵是正交矩阵.

5-11. 设α是n维非零列向量，$\alpha^T\alpha=1$，令$H=E-2\alpha\alpha^T$，证明H是对称的正交阵.

5-12. 设A，B都是n阶方阵，且$|A|\neq 0$，证明AB与BA相似.

5-13. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&x\\4&0&5\end{pmatrix}$可对角化，求$x$.

5-14. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$可对角化，求$x$和$y$应该满足什么条件.

5-15. 判断下列矩阵能否相似于对角矩阵；若能，求出可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$为对角阵.

(1) $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$， (2) $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&2&1\\0&1&3\end{pmatrix}$， (3) $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$.

5-16. (1) 设$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$，求$A^n$（$n$是正整数）；

(2) 设$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，求$A^{10}-6A^9+5A^8$.

5-17. 求出正交矩阵P，使得$P^{-1}AP$为对角阵.

(1) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$， (2) $A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$， (3) $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$.